

Mathematics

מבנים מתמטיקה

חברת סיכום קורס

חשבון אינפיטסימלי – קורס ראשון

תוכן עניינים

4.....	הקדמה
5.....	פונקציות
5.....	תכונות והגדרות יסוד
7.....	גבולות
7.....	הגדרת הגבול
8.....	משפט הסנדביץ'
8.....	גבולות חד-צדדיים
9.....	אריתמטיקה
9.....	היינה – הקשר בין סדרות לפונקציות
10.....	רציפות
10.....	הגדרת הרציפות
10.....	רציפות משמאל לנקודה
10.....	משפט הרציפות
11.....	מיון נקודות אי-רציפות
11.....	סליקה
11.....	קפיצה
11.....	עיקרית
12.....	משפטי רציפות יסודיים
12.....	משפט ערך הביניים
12.....	משפט ערך הביניים המוכלל
12.....	משפט ווירשטראס
13.....	גזירות
13.....	הגדרת הגזירות
13.....	משפט – גזירות גוררת רציפות
13.....	כלל השרשרת

- 14.....נגזרת של פונקציה הפוכה
- 14.....נגזרות חד-צדדיות
- 14.....נגזרת ימנית
- 14.....נגזרת שמאלית
- 14.....משפט – שיוויון נגזרות חד-צדדיות
- 15.....כללי גזירה
- 15.....נגזרות של פונקציות טריגונומטריות הפוכות
- 16.....**כלל לופיטל**
- 16.....משפט לופיטל (ניסוח עבור מקרה "0/0")
- 17.....**משפטים יסודיים**
- 17.....משפט פרמה
- 17.....משפט דרבו
- 17.....משפט רול
- 17.....משפט לגרנז'
- 17.....משפט קושי (הכללה ללגרנז')
- 18.....**טור טיילור**
- 18.....משפט נוסחת טיילור
- 18.....מקרה פרטי $n=0$ – משפט לגרנז'
- 18.....משפט יחידות הטור
- 19.....טור טיילור – מקלורן
- 19.....פיתוחים סטנדרטיים לטור מקלורן
- 20.....זוגיות טור מקלורן
- 21.....**חקירת פונקציה**
- 21.....נקודות קיצון מקומיות
- 21.....נקודת מקסימום מקומית
- 21.....נקודת מינימום מקומית
- 21.....משפט – התאפסות הנגזרת בנקודת קיצון מקומית
- 21.....נקודת קיצון גלובלית
- 21.....נקודת מקסימום גלובלית
- 21.....נקודת מינימום גלובלית
- 22.....תנאים לנקודת קיצון
- 22.....נקודה חשודה לקיצון (מקסימום או מינימום מקומי)
- 22.....משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת הראשונה
- 22.....משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת השנייה
- 22.....משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת ה- n -ית

23.....	תחומי קמירות וקעירות.....
23.....	קמירות.....
23.....	קעירות.....
23.....	מבחן הנגזרת השנייה לקמירות וקעירות.....
23.....	נקודת פיתול.....
24.....	אסימפטוטות.....
24.....	הגדרה – אסימפטוטה משופעת.....
24.....	הגדרה – אסימפטוטה אנכית.....
25.....	סדרות
25.....	הגדרות יסוד בסדרות.....
26.....	מבוא לתורת הקבוצות.....
27.....	סדרות רקורסיביות.....
27.....	תתי-סדרות.....
27.....	קריטריון קושי'.....
28.....	משפטי יסוד בסדרות.....
28.....	אריתמטיקה של סדרות.....
28.....	הרחבת האריתמטיקה.....
29.....	אי-שיוויונות בין סדרות.....
30.....	מנה ושורש של סדרה.....
31.....	מונטוניות וחסיונות.....
32.....	משפטי יסוד בתתי-סדרות.....
33.....	קריטריון קושי'.....
34.....	הגבול המפורסם e בסדרות.....
34.....	הגבול המפורסם סינוס בסדרות.....

הקדמה

שלום,

לפניכם חוברת הניתנת לכל מי שצופה בקורס עם חן הררי באתר סטאדיס www.Studies.co.il.
נא קראו בעיון את הדברים הבאים לפני שאתם מתחילים לעבוד עם החוברת.

איך לעבוד נכון עם חוברת סיכום קורס?

1) יש הבדל מהותי בין סיכום שלכם לבין סיכום של מישהו אחר – סיכום שלנו תמיד נקלט הרבה יותר טוב בראש שלנו מאשר סיכום של מישהו אחר, ולכן כדי שהסיכום הזה יקלט טוב, אני מציע לכם בחום לעבוד לפי עקרון מוביל אחד וחשוב: להפוך את הסיכום הזה – לשלכם.

אז איך עושים את זה? באופן הבא:

מדגישים, מקיפים, ממרקרים, ממלבנים, כותבים הערות קטנות בצד וכד'.

זה אומר באופן מפורש ש- $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$

וגם כותבים ממש על גבי הנוסחאות עצמן כמו למשל כך: $|f(x) - L| < \epsilon$

ובקיצור עושים כל מה שצריך כדי להפוך את הסיכום הזה לשלכם.

2) אחד המפתחות להצלחה בקורס הזה הוא: לשנן, לשנן ואז עוד קצת לשנן. לפעמים שואלים אותי – חן, מה אנחנו בשיעור היסטוריה? מה לשנן, זו מתמטיקה! אז אני תמיד עונה: "המתמטיקה בנויה על שלוש רגליים – הבנה, תרגול ושינון" (ולא ניתן להתחמק מהרגל השלישית!).

בקורס אנחנו עובדים על שני החלקים הראשונים: הבנה ותרגול.

שינון – זה עליכם. והחוברת הזאת נועדה בדיוק בשביל זה. השינון נועד לתת לכם רצף מחשבתי כדי שתוכלו לנסח דרך פתרון קוהרנטית טבעית ורציפה ללא צורך לעבור דרך חיפוש נוסחה כזאת או אחרת בדף הנוסחאות. משננים ואז הכל נמצא בראש שלנו ויכול להישלף מהזיכרון בקלות בשעת מבחן.
תעבדו לפי עקרונות אלו ובעזרת ה' תראו הצלחה.

בהצלחה!

פונקציות

תכונות והגדרות יסוד

הגדרת הפונקציה

נתונות שתי קבוצות D, E . פונקציה היא כלל המתאים לכל איבר מ- D איבר יחיד מ- E .

סימון: $f : D \rightarrow E$ או $D \xrightarrow{f} E$

פונקציה מונוטונית

f מונוטונית עולה אם לכל $x_1, x_2 \in D$, $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

פונקציה חסומה

f חסומה אם קיים מספר M כך שלכל $x \in D$, $|f(x)| \leq M$

פונקציה זוגית ואי-זוגית

f נקראת זוגית אם לכל $x \in D$, $f(-x) = f(x)$

f נקראת אי-זוגית אם לכל $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$

פונקציה מחזורית

f נקראת מחזורית אם לכל $x \in D$ קיים T כך ש- $f(x+T) = f(x)$

פונקציה חד-חד-ערכית

$x_2 \neq x_1 \Rightarrow f(x_2) \neq f(x_1) : x_1, x_2 \in D$ נקראת חח"ע אם לכל

או באופן שקול אם: $f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_2 = x_1$

במילים: f נקראת חד-חד-ערכית אם לכל ערך y יש לכל היותר ערך אחד של x .

משפט: f מונוטונית עולה ממש $\Leftrightarrow f$ חח"ע

פונקציה על

תהי f פונקציה בתחום D וטווח E .

הפונקציה נקראת על אם לכל $y \in E$ קיים $x \in D$ כך ש- $f(x) = y$.

במילים: f נקראת על אם לכל ערך y יש לכל הפחות ערך אחד של x .

פונקציה הפיכה

תהי פונקציה $f : D \rightarrow E$.

$g : E \rightarrow D$ נקראת פונקציה הפיכה אם קיימת פונקציה

כך שלכל $x \in D$: $g(f(x)) = x$

ולכל $y \in E$: $f(g(y)) = y$

$g = f^{-1}$ נקראת פונקציה הפוכה ל- f ומסומנת על-ידי:

משפט: f הפיכה $\Leftrightarrow f$ חח"ע ועל

גבולות

הגדרת הגבול

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x = x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. המספר L נקרא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל- x_0 אם לכל מספר $\varepsilon > 0$ קיים מספר $\delta > 0$ כך שלכל x ששונה מ- x_0 ($x \neq x_0$) ושייך לתחום $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ מתקיים ש- $f(x)$ שייכת לתחום $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

הגדרות הגבול השונות

$$\cdot |f(x) - L| < \varepsilon : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ שלכל } \delta > 0, \varepsilon > 0 \text{ קיים} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$\cdot |f(x) - L| < \varepsilon : x > x_0 \text{ שלכל } x_0 \text{ קיים}, \varepsilon > 0 \text{ לכל} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

$$\cdot |f(x) - L| < \varepsilon : x < x_0 \text{ שלכל } x_0 \text{ קיים}, \varepsilon > 0 \text{ לכל} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

$$\cdot f(x) > M : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ שלכל } \delta > 0, M > 0 \text{ קיים} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

$$\cdot f(x) < m : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ שלכל } \delta > 0, m < 0 \text{ קיים} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\cdot f(x) > M : x > x_0 \text{ שלכל } x_0 \text{ קיים}, M > 0 \text{ לכל} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\cdot f(x) > M : x < x_0 \text{ שלכל } x_0 \text{ קיים}, M > 0 \text{ לכל} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\cdot f(x) < m : x > x_0 \text{ שלכל } x_0 \text{ קיים}, m < 0 \text{ לכל} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\cdot f(x) < m : x < x_0 \text{ שלכל } x_0 \text{ קיים}, m < 0 \text{ לכל} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

משפט הסנדביץ'

אם בסביבת הנקודה x_0 מתקיים $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ לכל x השייך לסביבה זו, ואם בנוסף

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ אזי גם } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$$

גבולות חד-צדדיים

גבול מימין בנקודה

לפונקציה $f(x)$ יש גבול L_1 מצד ימין כאשר x מתקרב ל- x_0 ,

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $x_0 < x < x_0 + \delta$ אזי $|f(x) - L_1| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1 \text{ במקרה זה נסמן:}$$

גבול משמאל בנקודה

לפונקציה $f(x)$ יש גבול L_2 מצד שמאל כאשר x מתקרב ל- x_0 ,

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $x_0 - \delta < x < x_0$ אזי $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_2 \text{ במקרה זה נסמן:}$$

משפט – גבולות חד-צדדיים

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

כלומר, הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים זה לזה אם"מ קיים גבול ב- x_0

(והגבול הוא אותו הגבול: $L_1 = L_2 = L$).

אריתמטיקה אריתמטיקה של גבולות

אם הגבולות הבאים קיימים וסופיים: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ אזי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad \text{אם גם } L_2 \neq 0 \text{ אזי:}$$

היינה – הקשר בין סדרות לפונקציות משפט היינה

ל- f יש גבול ב- x_0 אם לכל סדרה x_n ששואפת ל- x_0 ($x_n \neq x_0$) מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

מסקנה – שלילת גבול של פונקציה

אם קיימות שתי סדרות שונות x_n , \bar{x}_n , ששואפות ל- x_0 , אבל $f(x_n)$ ו- $f(\bar{x}_n)$ שואפות לגבולות שונים, אזי ל- f לא קיים גבול ב- x_0 .

רציפות

הגדרת הרציפות

תהי f מוגדרת בנקודה x_0 ובסביבתה. f נקראת רציפה ב- x_0 אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אזי: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, כלומר מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

הערה: $f(x)$ לא מוגדרת ב- x_0 גורר ש- $f(x)$ לא רציפה ב- x_0 .

רציפות מימין לנקודה

פונקציה f המוגדרת מימין ל- x_0 נקראת רציפה מימין ב- x_0 אם: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

רציפות משמאל לנקודה

פונקציה f המוגדרת משמאל ל- x_0 נקראת רציפה משמאל ב- x_0 אם: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

משפט הרציפות

f רציפה ב- $x_0 \Leftrightarrow f$ רציפה גם מימין וגם משמאל ב- x_0 .

מיון נקודות אי-רציפות

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה נקובה של x_0 , נאמר כי x_0 היא נקודת אי-רציפות מסוג:

סליקה – אם:

(א) הגבול קיים ב- x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ (משני הצדדים).

(ב) אבל הגבול שונה מערך הפונקציה בנקודה - $L \neq f(x_0)$, או שהפונקציה בכלל לא מוגדרת ב- x_0 .

דוגמא

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0 \quad - \quad \text{הגבול קיים ב- } x_0 = 0 \quad (\text{זהו הגבול המפורסם: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1)$$

אבל f כלל לא מוגדרת ב- $x_0 = 0$.

שימו-לב שנק' אי-רציפות סליקה תמיד ניתנת לתיקון ע"י הגדרה שם, למשל:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

קפיצה

אם שני הגבולות הח"צ: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L^+$ ו- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L^-$ קיימים וסופיים, אבל $L^+ \neq L^-$.

דוגמא

$$f(x) = [x] \quad \text{בכל מספר שלם } x_0 = k.$$

עיקרית

אם ב- x_0 לפחות אחד מהגבולות החד-צדדיים לא קיים או לא סופי.

דוגמאות

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad - \quad \text{הגבול לא קיים ב- } x_0 = 0.$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad - \quad \text{הגבולות החד-צדדיים אינסופיים סביב } x_0 = 0.$$

משפטי רציפות יסודיים

משפט ערך הביניים

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$.

אם $f(a)f(b) < 0$ אזי קיימת נקודה $x_0 \in (a, b)$ כך ש- $f(x_0) = 0$.

משפט ערך הביניים המוכלל

תהי $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a, b]$. אם y_0 היא נקודת ביניים בין $f(a)$ ל- $f(b)$, כלומר:

$f(a) < y_0 < f(b)$ (או $f(b) < y_0 < f(a)$), אזי קיימת נקודה $x_0 \in (a, b)$ כך ש-

$$f(x_0) = y_0$$

משפט וויירשטראס

תהי $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a, b]$, אזי:

(א) $f(x)$ חסומה בקטע.

(ב) $f(x)$ מקבלת את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר שלה בקטע (זאת אומרת קיימות

שתי נקודות $x_1, x_2 \in [a, b]$ כך שלכל $x \in [a, b]$: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$).

גזירות

הגדרת הגזירות

תהי $f(x)$ מוגדרת בנקודה x_0 ובסביבתה. נקראת **גזירה** בנקודה x_0 אם הגבול הבא קיים

וסופי:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

בהצבת $h = x - x_0$ מתקבלת הגדרה שקולה לנגזרת:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

משפט – גזירות גוררת רציפות

אם $f(x)$ גזירה ב- x_0 אזי היא רציפה ב- x_0 (גזירות גוררת רציפות אך לא להיפך!).

כלל השרשרת

אם $g(x)$ גזירה בנקודה x_0 ו- $f(g)$ גזירה ב- $g(x_0)$ אזי הפונקציה המורכבת $f(g(x))$

גזירה ב- x_0 ומתקיים כלל השרשרת:

$$\left[f(g(x)) \right]' \Big|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) g'(x_0)$$

או בצורת הצגה דיפרנציאלית:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

נגזרת של פונקציה הפוכה

תהי f פונקציה מונוטונית עולה (יורדת) ממש ורציפה ב- $[a, b]$. תהי f^{-1} הפונקציה ההפוכה של f , אם f' קיימת ב- x_0 , $a < x_0 < b$ ו- $f'(x_0) \neq 0$ אזי f^{-1} גזירה ב- $y_0 = f(x_0)$ ומתקיים:

$$\boxed{[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

נגזרות חד-צדדיות

נגזרת ימנית

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה ימנית של הנקודה x_0 .

$f(x)$ נקראת גזירה מימין ל- x_0 אם הגבול הבא קיים וסופי:

$$\boxed{f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)}$$

נגזרת שמאלית

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה שמאלית של הנקודה x_0 .

$f(x)$ נקראת גזירה משמאל ל- x_0 אם הגבול הבא קיים וסופי:

$$\boxed{f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)}$$

משפט – שיוויון נגזרות חד-צדדיות

פונקציה $f(x)$ גזירה ב- x_0 אם"מ יש לה נגזרות מימין ומשמאל ב- x_0 והן שוות זו לזו.

$$\boxed{f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)} \quad \text{במקרה זה יתקיים השוויון:}$$

כללי גזירה

יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות גזירות בנקודה x_0 , אזי:

$$(1) \text{ נגזרת של סכום: } [f(x) + g(x)]' \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(2) \text{ נגזרת של הפרש: } [f(x) - g(x)]' \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) - g'(x_0)$$

$$(3) \text{ נגזרת של מכפלה: } [f(x)g(x)]' \Big|_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

(4) נגזרת של הפונקציה ההופכית:

$$\left[\frac{1}{f(x)} \right]' \Big|_{x=x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)} \quad \text{אם גם } f(x_0) \neq 0 \text{ אזי:}$$

(4) נגזרת של מנה:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' \Big|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \text{אם גם } g(x_0) \neq 0 \text{ אזי:}$$

נגזרות של פונקציות טריגונומטריות הפוכות

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arctan x]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$[\operatorname{arccot} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$$

כלל לופיטל

משפט לופיטל (ניסוח עבור מקרה "0/0")

תהינה f ו- g מוגדרות וגזירות בסביבה מנוקבת של x_0 ומקיימת את התנאים הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad (\text{א})$$

$$g'(x) \neq 0 \quad \text{בסביבה.} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ קיים ושווה ל- } L. \quad (\text{ג})$$

$$\text{אזי גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ קיים ושווה ל- } L.$$

הערות

$$\text{(א) המשפט לעיל מנוסח עבור המקרה בו } \frac{f}{g} \sim \frac{0}{0} \text{ בסביבת } x_0.$$

$$\text{(ב) המשפט נשאר נכון גם עבור המקרים בהם } \frac{f}{g} \sim \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ (כל האפשרויות בין הסימנים) בסביבת } x_0.$$

$$\text{(ג) המשפט נכון בין אם } x_0 \text{ סופי או } \pm\infty.$$

$$\text{(ד) המשפט נכון גם עבור גבול חד-צדדי.}$$

משפטים יסודיים

משפט פרמה

תהי f מוגדרת בקטע פתוח (a,b) ותהי $x_0 \in (a,b)$ אם f גזירה ב- x_0 ואם היא מקבלת

בנקודה זו את ערכה הגדול ביותר (או הקטן ביותר) בקטע אזי $f'(x_0) = 0$.

משפט דרבו

אם f גזירה בקטע סגור $[a,b]$, אזי $f'(x)$ מקבלת לפחות פעם אחת כל ערך ביניים שבין

$f'_+(a)$ ל- $f'_-(b)$.

משפט רול

תהי f רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b) .

אם בנוסף $f(a) = f(b)$ אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש- $f'(c) = 0$.

משפט לגרנז'

תהי f רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b) , אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש-

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

משפט קושי (הכללה ללגרנז')

תהיינה $f(x), g(x)$ רציפות בקטע סגור $[a,b]$ וגזירות בקטע פתוח (a,b) ו- $g'(x) \neq 0$ לכל

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad x \in (a,b) \text{ אזי קיימת נקודה } c \in (a,b) \text{ כך ש-}$$

הערה: בהצבת $g(x) = x$ מתקבל משפט לגרנז'.

טור טיילור

משפט נוסחת טיילור

תהי f פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת x_0 ותהי x נקודה כלשהי בסביבה זו.

אזי קיימת נקודה c בין x ל- x_0 כך ש-

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_n(x)} + R_n(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = T_n(x) + R_n(x)}$$

כאשר $R_n(x)$ נתונה ע"י נוסחת השארית של לגרנז':

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

מקרה פרטי $n=0$ – משפט לגרנז'

אם ניקח את $n=0$ בפיתוח:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{T_0(x)} + \underbrace{\frac{f'(c)}{1!}(x-x_0)}_{R_0(x)}$$

ובהעברת אגפים מתקבל משפט לגרנז':

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

משפט יחידות הטור

אם לפונקציה יש פיתוח לטור טיילור אזי הוא נקבע ביחידות.

טור טיילור – מקלורן

טור טיילור מפותח סביב הנקודה $x_0 = 0$ נקרא טור מקלורן:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

פיתוחים סטנדרטיים לטור מקלורן

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad D = (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad D = (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad D = (-\infty, \infty)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots, \quad D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad D = [-1, 1]$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad D = (-1, 1]$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad D = (-1, 1)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

for any real number m , $D = (-1, 1)$

זוגיות טור מקלורן

כאשר מפתחים את $f(x)$ לטור מקלורן,

אם $f(x)$ פונקציה זוגית, אזי כל המקדמים האי-זוגיים מתאפסים, כלומר תופענה רק חזקות זוגיות.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

דוגמא:

ואם $f(x)$ פונקציה אי-זוגית, אזי כל המקדמים הזוגיים מתאפסים, כלומר תופענה רק חזקות א"ז.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

דוגמא:

חקירת פונקציה

נקודות קיצון מקומיות

נקודת מקסימום מקומית

תהי $f(x)$ מוגדרת בנקודה x_0 ובסביבתה. x_0 נקראת נקודת מקסימום מקומית של $f(x)$ אם קיימת סביבה של x_0 כך ש- $f(x) \leq f(x_0)$ לכל x השייך לסביבה.

נקודת מינימום מקומית

תהי $f(x)$ מוגדרת בנקודה x_0 ובסביבתה. x_0 נקראת נקודת מינימום מקומית של $f(x)$ אם קיימת סביבה של x_0 כך ש- $f(x) \geq f(x_0)$ לכל x השייך לסביבה.

משפט – התאפסות הנגזרת בנקודת קיצון מקומית

אם נקודה x_0 היא נקודת קיצון מקומית (מקס' או מינ') ו- $f(x)$ גזירה ב- x_0 אזי: $f'(x_0) = 0$.
הערה: אם $f'(x_0) = 0$ לא ניתן להסיק על נקודת קיצון (כלומר המשפט ההפוך לא בהכרח נכון).

נקודת קיצון גלובלית

נקודת מקסימום גלובלית

תהי $f(x)$ פונקציה בקטע מסוים. x_0 נקראת נקודת מקסימום גלובלית של $f(x)$ אם לכל x בקטע מתקיים: $f(x) \leq f(x_0)$. כלומר $f(x_0)$ הוא הערך הגדול ביותר של הפונקציה בקטע.

נקודת מינימום גלובלית

תהי $f(x)$ פונקציה בקטע מסוים. x_0 נקראת נקודת מינימום גלובלית של $f(x)$ אם לכל x בקטע מתקיים: $f(x) \geq f(x_0)$. כלומר $f(x_0)$ הוא הערך הקטן ביותר של הפונקציה בקטע.

תנאים לנקודת קיצון

נקודה חשודה לקיצון (מקסימום או מינימום מקומי)

נאמר שנקודה x_0 חשודה לקיצון אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים:

$$(א) f'(x_0) = 0$$

(ב) $f(x)$ מוגדרת ב- x_0 אבל $f'(x_0)$ לא קיימת

למשל: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, אזי $x_0 = 0$ חשודה לקיצון לפי ב'.

משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת הראשונה

תהי $f(x)$ רציפה בנקודה x_0 וגזירה בסביבת x_0 פרט אולי ב- x_0 עצמה. אזי:

(א) אם $f'(x) > 0$ לכל $x < x_0$ ו- $f'(x) < 0$ לכל $x > x_0$ אזי x_0 נקודת מקסימום מקומית.

(ב) אם $f'(x) < 0$ לכל $x < x_0$ ו- $f'(x) > 0$ לכל $x > x_0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומית.

(ג) אם $f'(x)$ שומרת סימן ב- x_0 אזי x_0 לא נקודת קיצון מקומית של $f(x)$.

משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת השנייה

תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בנקודה x_0 וגם $f'(x_0) = 0$, אזי:

(א) אם $f''(x_0) < 0$ אזי ב- x_0 יש מקסימום מקומי.

(ב) אם $f''(x_0) > 0$ אזי ב- x_0 יש מינימום מקומי.

משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת ה- n

תהי $f(x)$ בעלת נגזרות רציפות עד סדר n בנקודה x_0 .

אם: $f^{(n-1)}(x_0) = \dots = f''(x_0) = f'(x_0) = 0$ אבל $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ו- n זוגי אזי יש קיצון.

אם $f^{(n)}(x_0) < 0$ יש מקסימום ואם $f^{(n)}(x_0) > 0$ יש מינימום.

אם n אי-זוגי אזי אין קיצון. אם $n = 2$ מתקבל המשפט הקודם כמקרה פרטי.

תחומי קמירות וקעירות

קמירות

הפונקציה $f(x)$ נקראת **קמורה בנקודה** x_0 אם קיימת סביבה של x_0 כך שבסביבה זו גרף הפונקציה נמצא מעל המשיק ב- x_0 , כלומר קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים:

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f(x)$ נקראת קמורה בקטע כלשהו אם היא קמורה בכל נקודה בקטע.

קעירות

הפונקציה $f(x)$ נקראת **קעורה בנקודה** x_0 אם קיימת סביבה של x_0 כך שבסביבה זו גרף הפונקציה נמצא מתחת למשיק ב- x_0 , כלומר קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים:

$$f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f(x)$ נקראת קעורה בקטע כלשהו אם היא קעורה בכל נקודה בקטע.

מבחן הנגזרת השנייה לקמירות וקעירות

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים ב- (a, b) אזי:

(א) אם $f''(x) > 0$ לכל $x \in (a, b)$ אזי $f(x)$ קמורה ב- (a, b) .

(ב) אם $f''(x) < 0$ לכל $x \in (a, b)$ אזי $f(x)$ קעורה ב- (a, b) .

נקודת פיתול

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה x_0 . נאמר ש- x_0 היא נקודת פיתול של $f(x)$ אם יש בנקודה מעבר בין תחום קמירות של הפונקציה לתחום קעירות שלה.

הערה: אם $f(x)$ גזירה פעמיים ו- $f''(x)$ משנה סימן ב- x_0 אזי x_0 היא נקודת פיתול של $f(x)$ ובהכרח $f''(x_0) = 0$. אך ההגדרה המקורית הינה גיאומטרית, כלומר $f(x)$ לא חייבת להיות מוגדרת או רציפה או גזירה בנקודה!

אסימפטוטות

הגדרה – אסימפטוטה משופעת

אם $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0$ אזי הישר $y = ax + b$ נקרא אסימפטוטה של f ב- ∞ .

אם $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ אזי הישר $y = ax + b$ נקרא אסימפטוטה של f ב- $-\infty$.

הערה: בפרט אם $a = 0$ מתקבלת אסימפטוטה אופקית (מקבילה לציר ה- x).

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) \quad \text{נוסחאות לחישוב הישר:}$$

אם הגבולות לעיל קיימים אזי הישר $y = ax + b$ הינו אסימפטוטה של f ב- ∞ (אם אחד מהם אינסופי או לא קיים אזי האסימפטוטה לא קיימת)

הגדרה – אסימפטוטה אנכית

אם $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \infty$ נקרא לישר האנכי העובר דרך הנקודה $(a, 0)$ אסימפטוטה אנכית מימין של f ב- a .

אם $\lim_{x \rightarrow a^-} |f(x)| = \infty$ נקרא לישר האנכי העובר דרך הנקודה $(a, 0)$ אסימפטוטה אנכית משמאל של f ב- a .

ל- f יש אסימפטוטה אנכית ב- $x = a$ אם f לא מוגדרת ב- a ולפחות אחד משני הגבולות הבאים

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

הוא אינסופי:

סדרות

הגדרות יסוד בסדרות

סדרה

אוסף אינסופי מסודר של מספרים ממשיים נקרא סדרה. סימון: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, או בקצרה: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

גבול של סדרה

נאמר שהמספר L הוא גבול הסדרה, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים: $|a_n - L| < \varepsilon$.
סימון: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ או בקצרה: $a_n \rightarrow L$.

הגדרה שקולה

L הוא גבול הסדרה אם לכל $\varepsilon > 0$ הקטע הפתוח $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ מכיל כמעט את כל איברי הסדרה.

שלילת הגדרת הגבול

L הוא לא הגבול של הסדרה, אם קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל n_0 קיים $n > n_0$ כך שמתקיים: $|a_n - L| \geq \varepsilon$.

שלילת הגדרת הגבול השקולה

L הוא לא הגבול של הסדרה, אם קיים $\varepsilon > 0$, כך שיש אינסוף איברים מחוץ לקטע $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

כלל אצבע לשלילה: לכל \leftrightarrow קיים.

גבול אינסופי

נאמר כי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאינסוף, אם לכל מספר M קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$: $a_n > M$.

סימון: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, או בקצרה: $a_n \rightarrow \infty$.

נאמר כי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת למינוס אינסוף, אם לכל מספר m קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$: $a_n < m$.

סימון: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, או בקצרה: $a_n \rightarrow -\infty$.

הגדרות שקולות

סדרה a_n שואפת ל- ∞ אם יש איזשהו מספר M , כך שכמעט כל איברי הסדרה גדולים ממנו.

סדרה a_n שואפת ל- $-\infty$ אם יש איזשהו מספר m , כך שכמעט כל איברי הסדרה קטנים ממנו.

מבוא לתורת הקבוצות

קבוצה חסומה

תהי A קבוצה של מספרים ממשיים ($A \in \mathbb{R}$). יהי x איבר ב- A ($x \in A$), אזי:

A חסומה מלמעלה אם קיים M כך שלכל $x \in A$: $x \leq M$.

A חסומה מלטה אם קיים m כך שלכל $x \in A$: $x \geq m$.

A חסומה אם קיים K כך שלכל $x \in A$: $|x| \leq K$.

או באופן שקול: A חסומה אם היא חסומה מלמעלה ומלטה.

סופרמום ואינפימום

תהי $A \in \mathbb{R}$, אזי:

S נקרא סופרמום של A אם הוא החסם מלמעלה הכי קטן של A (הדוק מלמעלה). סימון: $\sup A$.

I נקרא אינפימום של A אם הוא החסם מלטה הכי גדול של A (הדוק מלטה). סימון: $\inf A$.

מקסימום ומינימום

תהי $A \in \mathbb{R}$ ויהיו $S = \sup A$, $I = \inf A$, אזי:

אם $S \in A$ אזי הוא נקרא המקסימום של A . סימון: $\max A$.

אם $I \in A$ אזי הוא נקרא המינימום של A . סימון: $\min A$.

אקסיומת השלמות

לכל קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים החסומה מלמעלה – קיים סופרמום.
(\Leftrightarrow) לכל קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים החסומה מלטה – קיים אינפימום)

משפט הסופרמום

$S = \sup A$ אם ורק אם:

(א) לכל $x \in A$, $x \leq S$.

(ב) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x_0 \in A$ כך ש- $x_0 > S - \varepsilon$.

סדרות רקורסיביות

סדרה רקורסיבית

סדרה שבה כל איבר מוגדר על-ידי האיברים שקודמים לו.
הנוסחה המתקבלת נקראת נוסחת נסיגה וביחד עם תנאי ההתחלה, מוגדרת הסדרה כולה.

שלבי האינדוקציה

כדי להוכיח טענה באמצעות אינדוקציה, עובדים לפי השלבים הבאים:

(א) בדיקה: בודקים שהטענה נכונה עבור $n = 1$.

(ב) הנחת האינדוקציה: מניחים שהטענה נכונה עבור n מסוים.

(ג) הוכחה: מוכיחים שהטענה נכונה עבור $n + 1$.

תתי-סדרות

תת-סדרה

סדרה המתקבלת מ- a_n על-ידי השמטת חלק מאיבריה. סימון: $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

גבול חלקי

גבול של תת-סדרה.

קריטריון קושי

סדרת קושי

סדרה המקיימת את קריטריון קושי.

משפטי יסוד בסדרות

משפט קיום יחידות

אם לסדרה קיים גבול אזי הוא יחיד.

משפט התכנסות גוררת חסימות

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

משפט חסומה כפול אפיסה

אם $a_n \rightarrow 0$ והסדרה b_n חסומה אזי $a_n b_n \rightarrow 0$.

אריתמטיקה של סדרות

אם a_n, b_n שתי סדרות מתכנסות, אזי:

$$\text{א) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\text{ב) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\text{ג) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad \text{כאשר לכל } n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

הרחבת האריתמטיקה

$$\text{א) כלל הסכום - אם } a_n \rightarrow \infty \text{ ו- } b_n > m \text{ (חסומה מלמטה), אזי } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$$

$$\text{ב) כלל המכפלה - אם } a_n \rightarrow \infty \text{ ו- } b_n > m > 0, \text{ אזי } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$$

$$\text{ג) כלל המנה - (i) אם } |a_n| \rightarrow \infty, \text{ אזי } \frac{1}{a_n} \rightarrow 0$$

$$\text{(ii) אם } a_n \rightarrow 0 \text{ וגם } a_n > 0 \text{ לכל } n, \text{ אזי: } \frac{1}{a_n} \rightarrow \infty$$

$$\text{אם } a_n \rightarrow 0 \text{ וגם } a_n < 0 \text{ לכל } n, \text{ אזי: } \frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty$$

אי-שיויונות בין סדרות

משפט

אם: $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ שתי סדרות מתכנסות, אזי:

(א) אם $a < b$ אזי $a_n < b_n$ החל ממקום מסוים.

(ב) אם החל ממקום מסוים $a_n \leq b_n$ אזי $a \leq b$.

מסקנה

תהי סדרה מתכנסת $a_n \rightarrow L$ ומספר b . אם החל ממקום מסוים $a_n \geq b$ אזי $L \geq b$ (בפרט אם $a_n \geq 0$ אזי $L \geq 0$).

משפט הסנדביץ'

אם $a_n \rightarrow L$, $c_n \rightarrow L$ והחל מ- n מסוים $a_n \leq b_n \leq c_n$, אזי גם $b_n \rightarrow L$.

משפט הפיצה

אם $a_n \rightarrow \infty$ והחל מ- n מסוים $a_n \leq b_n$, אזי גם $b_n \rightarrow \infty$.

אם $b_n \rightarrow -\infty$ והחל מ- n מסוים $a_n \leq b_n$, אזי גם $a_n \rightarrow -\infty$.

משפט אי-שיויון הממוצעים

יהיו n מספרים ממשיים וחיוביים a_1, a_2, \dots, a_n , אזי:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

או במילים: ממוצע חשבוני \leq ממוצע הנדסי \leq ממוצע הרמוני

כאשר שיוויון מתקבל אם ורק אם $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

משפט צ'זארנו

תהי a_n סדרה מתכנסת ויהי $S_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ הממוצע החשבוני שלה,

הממוצע ההרמוני שלה, $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$

ו- $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ הממוצע ההנדסי שלה, אזי:

- (א) אם $a_n \rightarrow L$ אזי גם $S_n \rightarrow L$.
- (ב) אם $a_n \rightarrow L$ אזי גם $H_n \rightarrow L$, כאשר $L \neq 0$, לכל n .
- (ג) אם $a_n \rightarrow L$ אזי גם $G_n \rightarrow L$, כאשר $a_n > 0$ לכל n .

מנה ושורש של סדרה

משפט מקשר בין מנה לשורש ("ומשה")

תהי a_n סדרה חיובית. אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L$ אזי גם $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow L$

מסקנות

- (א) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$ לכל קבוע חיובי c .
- (ב) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
- (ג) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$ לכל פולינום חיובי $P(n)$.
- (ד) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ לכל סדרה חיובית וחסומה כך ש- $0 < m \leq a_n \leq M$.

מבחן המנה

תהי a_n סדרה חיובית. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ אזי:

(א) אם $L < 1$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(ב) אם $L > 1$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

(ג) אם $L = 1$ אזי לא ניתן לדעת דבר על התכנסות/התבדרות הסדרה.

מבחן השורש

תהי a_n סדרה חיובית. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ אזי:

(א) אם $L < 1$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(ב) אם $L > 1$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

(ג) אם $L = 1$ אזי לא ניתן לדעת דבר על התכנסות/התבדרות הסדרה.

מונוטוניות וחסיונות

משפט – מונוטוניות וחסיונות

כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

כל סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה – מתכנסת לסופרמום שלה.

כל סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלטה – מתכנסת לאינפימום שלה.

משפט – מונוטוניות ואי-חסיונות

כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.

כל סדרה מונוטונית עולה ולא חסומה מלמעלה – מתבדרת ל- $+\infty$.

כל סדרה מונוטונית יורדת ולא חסומה מלטה – מתבדרת ל- $-\infty$.

משפטי יסוד בתתי-סדרות

משפט – הלמה של קנטור

תהינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות. אם:

$$(א) \quad a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

$$(ב) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

אזי שתיהן מתכנסות לאותו הגבול.

משפט – הלמה של קנטור – ניסוח גיאומטרי

תהי $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קטעים סגורים. אם:

$$(א) \quad \text{כל קטע מכיל את הבא אחריו: } [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

$$(ב) \quad \text{אורכי הקטעים שואפים לאפס: } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

אזי קיימת נקודה יחידה c המשותפת לכל הקטעים, כך שלכל n טבעי $c \in [a_n, b_n]$.

משפט

אם סדרה מתכנסת אזי כל תת-סדרה שלה גם מתכנסת – ולאותו הגבול.

משפט

אם לסדרה קיימות שתי תתי-סדרות עם גבולות שונים, אזי לסדרה אין גבול.

משפט הירושה

תהי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ תת-סדרה שלה, אזי:

(א) אם a_n מתכנסת אזי גם a_{n_k} מתכנסת – ולאותו הגבול.

(ב) אם a_n חסומה (מלמעלה/מלמטה/שניהם) אזי גם a_{n_k} חסומה.

(ג) אם a_n מונוטונית (עולה/יורדת/ממש) אזי גם a_{n_k} מונוטונית.

משפט בולצאנו-ויירשטראס (B-W)

- (א) לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.
- (ב) לכל סדרה לא חסומה מלמעלה יש תת-סדרה המתבדרת ל- $+\infty$.
- (ג) לכל סדרה לא חסומה מלמטה יש תת-סדרה המתבדרת ל- $-\infty$.

משפט בולצאנו-ויירשטראס (B-W) המלא

לכל סדרה יש תת-סדרה המתכנסת במובן הרחב.

משפט

לכל סדרה יש תת-סדרה מונוטונית.

משפט

סדרה מתכנסת אמ"מ יש לה גבול חלקי יחיד.

קריטריון קושי

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 , כך שלכל $m, n > n_0$ $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

ניסוח שקול

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 , כך שלכל $n > n_0$ ולכל $p \in \mathbb{N}$ $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

משפט – סדרה מתכנסת אמ"מ היא סדרת קושי.

הגבול המפורסם e בסדרות

משפט

תהי הסדרה: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. אזי a_n מתכנסת ואת גבולה מסמנים באות e (כך ש- $e \approx 2.71$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

משפט

תהי $a_n \rightarrow \infty$, $0 \neq a_n$, אזי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

משפט

אם $a_n \rightarrow \infty$, $0 \neq a_n$ ו- $b_n \rightarrow L$ (סופי או אינסופי), אזי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n b_n} = e^L$$

הגבול המפורסם סינוס בסדרות

הסבר אינטואיטיבי

עבור זוויות מאוד קטנות (" $\alpha \ll 1$ ") מתקיים: $\sin \alpha \approx \alpha$.

כל ש- α יותר קטנה, כך הקירוב נהיה יותר מדויק: $\frac{\sin \alpha}{\alpha} \approx \frac{\alpha}{\alpha} = 1$ $\alpha \ll 1$.

בגבול בו $\alpha \rightarrow 0$ מתקבל "הגבול המפורסם": $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

כעת, אם ניקח למשל את הסדרה ההרמונית: $\alpha_n = \frac{1}{n}$, אזי כאשר $n \rightarrow \infty$ מתקיים ש- $\alpha_n \rightarrow 0$

ומתקבלת צורה נוספת לגבול המפורסם עבור סדרות: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$

באופן כללי יותר אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ אזי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$$